УТВЕРЖДЕНО
решением Ученого совета факультета математики,
информационных и авиационных технологий
от « 17 »_____мая_____20_22___г., протокол №_4/22____

Председатель________ Волков М.А.
(подпись, расшифровка подписи)
«__17__»_______мая______________2022_____г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Дисциплина	Функциональный анализ
Факультет	Математики, информационных и авиационных технологий
Кафедра	Информационной безопасности и теории управления
Курс	3

Специальность: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
код направления (специальности), полное наименование

Специализация: «Математические методы защиты информации»
полное наименование

Форма обучения:___очная
очная, заочная, очно-заочная (указать только те, которые реализуются)

Дата введения в учебный процесс УлГУ: 01.09.2022

Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол №____ от _______ 20_____ г.
Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол №____ от _______ 20_____ г.
Программа актуализирована на заседании кафедры: протокол №____ от _______ 20_____ г.

Сведения о разработчиках:

ФИО	Кафедра	Должность, ученая степень, звание
Юрьева Ольга Дмитриевна	ИБиТУ	доцент, к.ф-м.н, доцент

СОГЛАСОВАНО
Заведующий кафедрой «Информационная безопасность и теория управления», реализующей дисциплину
_____ *(подпись)* _Андреев А.С._/ *(Ф.И.О.)*
«11_»__мая____2022 г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ:

Цели освоения дисциплины: Данная дисциплина знакомит студентов с важнейшими методами функционального анализа, как классическими, так и численными. Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже общими и предметно-специализированными компетенциями. Дисциплина "Функциональный анализ" непосредственно связана с дисциплинами "Алгебра и геометрия", "Математический анализ", "Дифференциальные уравнения".

Задачи освоения дисциплины: Предметом изучения являются общая теория бесконечномерных метрических пространств, линейных нормированных пространств, гильбертовых пространств, функционалов и операторов на них; теория меры и интегрирования в общих пространствах с мерой, установление обобщающих связей между различными разделами математики, такими как классический анализ, дифференциальные уравнения, линейная алгебра и т.д. В процессе обучения студенты должны усвоить методику дисциплины и приобрести навыки исследования и решения задач функционального анализа.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП:

Дисциплина «Функциональный анализ» (Б1.В.ДВ.02.02) относится к вариативной части обязательных дисциплин ОПОП по специальности 10.05.01 «Компьютерная безопасность» специализация «Математические методы защиты информации» (Б1.В.1.ДВ.02.02) и является курсом по выбору.

Дисциплина читается в 5-ом семестре 3-го курса студентам очной формы обучения. Для изучения этой дисциплины необходимы знания основных методов линейной алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений. Дисциплина является интегральной и формирует обобщающие фундаментальные математические знания, необходимые для изучения основных прикладных курсов, посвященных аналитическому математическому и имитационному компьютерному моделированию реальных объектов, а также других дисциплин базовой и вариативной частей профессионального цикла этой ОПОП и для прохождения государственной итоговой аттестации.

3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ), СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОСНОВНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Процесс изучения дисциплины в соответствии с ФГОС ВО по специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность направлен на формирование следующих компетенций:

Код и наименование реализуемой компетенции	**Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесенных с индикаторами достижения компетенций**

ПК-5 - способен участвовать в разработке программных и программно-аппаратных средств для систем защиты информации компьютерных систем ПК-6 - способен разрабатывать математические модели безопасности компьютерных систем	**Знать**: основные теоретические положения функционального анализа, методы решения и исследования важнейших типовых задач, важнейшие итерационные алгоритмы. **Уметь**: правильно проводить математическую формализацию задач, выбирать адекватные математические модели, математически корректно применять методы функционального анализа, выполнять интерпретацию математических результатов для реальных систем. **Владеть:** знаниями основных понятий, утверждений, а так же методами функционального анализа, как теоретическими, так и численными.

4. ОБЩАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Объем дисциплины в зачетных единицах (всего): 3 зачетных единицы.

4.2. Объем дисциплины по видам учебной работы (в часах):

Вид учебной работы	**Количество часов (форма обучения очная)**	
	Всего по плану	**В т.ч. по семестрам** **5 семестр**
1	2	3
Контактная работа обучающихся с преподавателем в соответствии с УП	54	54
Аудиторные занятия:		
Лекции	36	36
Семинары и практические занятия	18	18
Лабораторные работы, практикумы	-	-
Самостоятельная работа	54	54
Контроль		
Форма текущего контроля знаний и контроля самостоятельной работы:	устный опрос, тестирование, проверка решения задач, 1 контрольная работа	устный опрос, тестирование, проверка решения задач, 1 контрольная работа
Курсовая работа	-	-
Виды промежуточной/итоговой аттестации (экзамен, зачет)	зачет	зачет
Всего часов по дисциплине	108	108

4.3. Содержание дисциплины (модуля). Распределение часов по темам и видам учебной работы:

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	Всего	Виды учебных занятий					Форма текущего контроля знаний
		Аудиторные занятия			Занятия в интерактивной форме	Самостоятельная работа	
		Лекции	Практические занятия, семинары	Лабораторные работы, практикумы			
1	2	3	4	5	6	7	8
Раздел 1. Метрические пространства							
Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства CLp[0,1], p>=1. Лемма о вложенных шарах. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в l_p, $p>=1$. Принцип сжимающих отображений. Примеры.	21	8	4	-	-	9	Устный опрос, проверка решения задач, тестирование
Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега							
Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ-аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: A измеримо по Жордану $\Rightarrow$ A измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации. Теорема о σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограничен-	21	8	4	-	-	11	Устный опрос, проверка решения задач

ных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер. Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства). Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).							
Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы							
Линейные нормированные и банаховы пространств. Линейные непрерывные функции , их норма . Эквивалентность	15	6	2	-	-	9	Устный опрос, проверка решения задач

непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к l_p, $p\geq 1$. Теорема Хана-Банаха. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном баховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий *Ker A=0* или *Im=L* для обратимости оператора $\mathbf{A}\in \boldsymbol{L}(\mathrm{L})$ в конечномерном пространстве L. Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий *Ker A=0* или *Im=L.*							
Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства							
Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последо-	19	6	4	-	-	7	Устный опрос, проверка решения задач

вательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.							
Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы							
Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.	17	4	2	-	-	11	Устный опрос, проверка решения задач, контрольная работа
Раздел 6. Обобщенные функции							
Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость	13	4	2	-	-	7	Устный опрос, проверка решения задач.

обобщенных функций, δ-образные последовательности. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.							
Зачет							
Итого 5 семестр	108	36	18	-	-	54	-
Всего	108	36	18	-	-	54	-

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Раздел 1. Метрические пространства

Метрическое пространство. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Предельные точки, точки прикосновения, сходимость.

Плотные множества. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства. Полные метрические пространства, примеры. Неполнота пространства CLp[0,1], p>=1. Лемма о вложенных шарах. Теорема Бэра.

Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью. Теорема Арцела. Критерий компактности в l_p, p>=1.

Принцип сжимающих отображений. Примеры.

Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега

*Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ-аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств. Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: **A** измеримо по Жордану $\Rightarrow$ **A** измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации. Теорема о σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.*

Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства).

Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд с единичными интервалами. Теоремы Б. Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Теорема о полноте про-

странства $L_1[0,1]$. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).

Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы

Линейные нормированные и банаховы пространств. Линейные непрерывные функции , их норма . Эквивалентность непрерывности и ограниченности. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к l_p, $p\geq 1$. Теорема Хана-Банаха.

Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном баховом пространстве. Теорема Банаха-Штейнгауза. Теорема Банаха об обратном операторе. Достаточность одного из условий Ker A=0 или Im=L для обратимости оператора $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{L}(L)$ в конечномерном пространстве L. Примеры необходимых операторов, для которых выполнено одно из условий Ker A=0 или Im=L.

Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства

Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.

Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС в сепарабельном гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Теорема Рисса-Фишера.

Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.

Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы

Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.

Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному. Необратимость компактного оператора. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре самосопряженного оператора. Спектр компактного самосопряженного оператора. Теорема Гильберта.

Раздел 6. Обобщенные функции

Пространство основных функций, его нетривиальность, сходимость в нем. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Примеры. Бесконечная дифференцируемость обобщенных функций. Сходимость обобщенных функций, δ-образные последовательно-

сти. Примеры рядов, сходящихся в смысле обобщенных функций. Преобразование Фурье обобщенных функций.

6. ТЕМЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1) Примеры метрических пространств.
2) Корректность метрик.
3) Сепарабельность метрических пространств.
4) Полнота метрических пространств.
5) Предкомпактность и компактность в метрических пространствах.
6) Принцип сжимающих отображений.
7) Мера Лебега.
8) Интеграл Лебега.
9) Линейные непрерывные функционалы.
10) Норма линейных непрерывных функционалов.
11) Линейные непрерывные операторы.
12) Норма линейного непрерывного оператора.
13) Контрольная работа.
14) Решение простейших интегральных уравнений.
15) Задачи на спектр и резольвенту линейных непрерывных операторов.
16) Задачи на собственные значения и собственные функции.
17) Обобщенные функции. Основные свойства.
18) Применение обобщенных функций к решению линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

7. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ, ПРАКТИКУМЫ

Данный вид работы не предусмотрен учебным планом.

8. ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ, КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, РЕФЕРАТОВ

Выполнение курсовых работ и рефератов не предусмотрено учебным планом.

Примерная тематика контрольных работ по дисциплине:

Вариант 1

Задача 1. Определяет ли данная функция расстояние в R? $\rho(x,y) = arctg(x-y)^2$.

Задача 2. Является ли пространство C[0,1] полным с данной метрикой?

$\rho(f,g) = \max\limits_{0\le x\le 1}\left(\frac{1}{1+x^2}|f(x)-g(x)|\right).$

Задача 3. Пусть $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||z|| = max(|x|,|y|)$. Подпространство $L_0 = \{(x,y): y+3x=0\}$, $f_0(x,y) = x+y$. Продолжить функционал f_0 на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

Задача 4. Найти нормы функционала в C[0,1] и L1[0,1]. $F(f) = 3\int\limits_0^{1/2} f(t)dt - 2\int\limits_{1/2}^{1} f(t)dt$.

Задача 5. Найти норму оператора $A:\ell_2 \to \ell_2,\ A\{x_n\} = \left\{ \left(\dfrac{n+3}{n+5} \right)^n x_n \right\}$.

Вариант 2

Задача 1. Определяет ли данная функция расстояние в $\mathbb{R}$? $\rho(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} \right)$.

Задача 2. Является ли пространство C[0,1] полным с данной метрикой?
$\rho(f,g) = \max\limits_{0\le x\le 1}(x\cos x\,|\,f(x)-g(x)\,|)$.

Задача 3. Пусть $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||z|| = |x| + |y|$. Подпространство $L_0 = \{(x,y): y+2x=0\}$, $f_0(x,y) = 3y$. Продолжить функционал f_0 на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

Задача 4. Найти нормы функционала в C[0,1] и L1[0,1]. $F(f) = 2\int\limits_0^{1/3} f(t)dt - 6\int\limits_{2/3}^{1} f(t)dt$.

Задача 5. Найти норму оператора $A: C[1,4] \to C[1,4],\ Af(x) = (x^2 + \dfrac{16}{x} - 16) f(x)$.

9. ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и несепарабельного пространства.
2. Полные метрические пространства, примеры. Полнота пространства CLp[0,1], p>=1 . Лемма о вложенных шарах.
3. Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.
4. Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.
5. Теорема Арцела.
6. Критерий предкомпактности в $l_p, p \ge 1$.
7. Принцип сжимающих отображений. Разрешимость уравнения $f(x) + \int\limits_0^x K(x,t) f(t)dt = g(x)$.
8. Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ- аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств (без доказательства). Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: A измеримо по Жордану => A измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.
9. Теорема о σ- алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.
10. Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.
11. Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.

12. Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.
13. Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.
14. Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова (без доказательства).
15. Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(f^{-1}[k,k+1])$.
16. Теоремы Б.Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Условие интегрируемости функции $f(x)=x^{-\alpha}$ на $[0,1], \alpha \in R$.
17. Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$.
18. Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций)
19. Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности.
20. Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к $l_p, p \ge 1$.
21. Теорема Хана-Банаха.
22. Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в бесконечномерном банаховом пространстве.
23. Теорема Банаха-Штейнгауза.
24. Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Достаточность одного из условий $KerA=0$ или $\operatorname{Im} A=L$ для обратимости оператора $A \in L(L)$ в конечномерном пространстве L. Примеры необходимых операторов $A \in L(L)$, для которых выполнено одно из условий $KerA \ne 0$ или $\operatorname{Im} A \ne L.$
25. Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.
26. Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС с сепарабельном гильбертовом пространстве.
27. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
28. Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфность бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.
29. Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.
30. Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.
31. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора.

32. Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.
33. Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.
34. Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.
35. Теорема Гильберта.

36. Пространство основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции, действия над ними. Фундаментальное решение дифференциального оператора и решение неоднородного ДУ.

10. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ОБУЧАЮЩИХСЯ

Форма обучения: очная.

Название разделов и тем	**Вид самостоятельной работы *(проработка учебного материала, решение задач, реферат, доклад, контрольная работа, подготовка к сдаче зачета, экзамена и др.)***	**Объем в часах**	**Форма контроля *(проверка решения задач, реферата и др.)***
Раздел 1. Метрические пространства			
Метрическое пространство. Плотные, открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве. Сепарабельность. Пример сепарабельного и не сепарабельного пространства.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Полные метрические пространства, примеры. Полнота пространства CLp[0,1], p>=1 . Лемма о вложенных шарах.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Компактные и предкомпактные множества в метрическом пространстве. Предкомпактность и вполне ограниченность. Теорема Хаусдорфа.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Компактные метрические пространства. Связь с предкомпактностью и замкнутостью.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Арцела.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Критерий предкомпактности в $l_p, p \ge 1$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Принцип сжимающих отображений. Разрешимость линейного интегрального уравнения Вольтерра с нелинейным ядром.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 2. Мера, измеримые функции, интеграл Лебега			
Полукольцо прямоугольников в R^2 и σ - аддитивная мера на этом полукольце. Продолжение ее на кольцо элементарных множеств (без доказательства). Измеримые по Жордану и Лебегу множества. Справедливость импликации: A измеримо по Жордану => A измеримо по Лебегу. Несправедливость обратной импликации.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос

Теорема о σ - алгебре измеримых по Лебегу множеств. Непрерывность и полнота меры. Измеримость ограниченных открытых и замкнутых множеств. Существование неизмеримых множеств на отрезке.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	
Обобщение меры Лебега для неограниченных множеств. Мера Лебега-Стилтьеса. Теорема Лебега о представлении любой меры в виде суммы специальных мер.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Измеримые функции. Различные общие определения. Измеримость композиции функций. Измеримые функции на отрезке, критерий. Примеры.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Измеримость функции, непрерывной почти всюду. Измеримость предела последовательности измеримых функций, сходящихся почти всюду.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Связь между сходимостью почти всюду и по мере. Контрпример.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Существование сходящейся п.в. подпоследовательности в сходящейся по мере последовательности измеримых функций. Теоремы Лузина и Егорова.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Определенный интеграл Лебега. Существование интеграла Лебега от ограниченной измеримой функции и от функции, для которой сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(f^{-1}[k,k+1])$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Теоремы Б.Леви, Фату и Лебега (без доказательства). Условие интегрируемости функции $f(x)=x^{-\alpha}$ на $[0,1], \alpha \in R$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Теорема о полноте пространства $L_1[0,1]$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Теорема о сепарабельности пространства $L_1[0,1]$ (плотность в нем непрерывных функций).	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Раздел 3. Линейные нормированные пространства. Линейные непрерывные функционалы и операторы			
Линейные нормированные и банаховы пространства. Линейные непрерывные функционалы, их норма. Эквивалентность непрерывности и ограниченности.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Сопряженное пространство, его полнота и нетривиальность. Теорема о пространстве, сопряженном к $l_p, p \geq 1$.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Хана-Банаха.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Линейные ограниченные операторы, их норма. Компактные операторы. Примеры. Некомпактность единичного оператора в	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос

бесконечномерном банаховом пространстве.			
Теорема Банаха-Штейнгауза.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Банаха об обратном операторе (без доказательства). Достаточность одного из условий $KerA=0$ или $\operatorname{Im} A = L$ для обратимости оператора $A \in L(L)$ в конечномерном пространстве L . Примеры необходимых операторов $A \in L(L)$, для которых выполнено одно из условий $KerA \neq 0$ или $\operatorname{Im} A \neq L.$	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Раздел 4. Предгильбертовы и гильбертовы пространства			
Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского, нормируемость. Гильбертово пространство, примеры.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Теорема об ортогонализации системы. Полные и замкнутые системы. Теорема о существовании замкнутых ОНС с сепарабельном гильбертовом пространстве.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Эквивалентность полноты и замкнутости для систем. Изоморфность бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос, проверка решения задач
Теорема Рисса-Фишера. Сильная и слабая сходимость элементов в гильбертовом и банаховом пространствах. Пример слабо сходящейся последовательности, не сходящейся сильно. Сильная ограниченность слабо сходящейся последовательности.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	1	устный опрос
Раздел 5. Спектр и резольвента оператора. Сопряженные и самосопряженные операторы			
Спектр оператора в банаховом пространстве. Резольвентное множество и его открытость (замкнутость спектра). Непустота спектра. Верхняя оценка спектрального радиуса нормой оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве, их существование. Теорема о разложении пространства в прямую сумму замыкания образа оператора и ядра сопряженного. Спектр сопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Самосопряженные операторы, их спектр. Равенство спектрального радиуса норме оператора для самосопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос, проверка решения задач
Критерий компактности оператора в гильбертовом пространстве. Компактность оператора, сопряженного к компактному.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос, проверка решения задач

Альтернатива Фредгольма (с неполным доказательством). Теорема о спектре компактного самосопряженного оператора.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	2	устный опрос
Теорема Гильберта.		1	устный опрос
Раздел 6. Обобщённые функции			
Пространство основных и обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции, действия над ними.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	4	устный опрос, проверка решения задач
Фундаментальное решение дифференциального оператора и решение неоднородного ДУ.	Проработка учебного материала, подготовка к сдаче экзамена	3	устный опрос, проверка решения задач

11. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

а) Список рекомендуемой литературы

основная

1. Колмогоров, Андрей Николаевич. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для матем. спец. ун-тов / Колмогоров Андрей Николаевич, С. В. Фомин. - 6-е изд., испр. - Москва : Наука, 1989.

2. Богданов, А. Ю. Лекции по функциональному анализу : учеб. пособие / А. Ю. Богданов. - Ульяновск : УлГУ, 2003. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/984/bogdanov.pdf

3. Треногин В.А., Функциональный анализ : Учебник. / Треногин В.А. - 3-е изд., испр. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 488 с. - ISBN 5-9221-0272-9 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922102729.html

дополнительная

1. Лебедев В.И., Функциональный анализ и вычислительная математика : Учеб. пособие. / Лебедев В.И. - 4-е изд., перераб. и доп. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 296 с. - ISBN 5-9221-0092-0 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922100920.html
2. Люстерник, Лазарь Аронович. Краткий курс функционального анализа : учеб. пособие для вузов / Люстерник Лазарь Аронович, В. И. Соболев. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2009
3. Ревина С.В., Функциональный анализ в примерах и задачах : учебное пособие / Ревина С.В., Сазонов Л.И. - Ростов н/Д : Изд-во ЮФУ, 2009. - 120 с. - ISBN 978-5-9275-0683-5 - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785927506835.html
4. Осиленкер, Б. П. Задачи и упражнения по функциональному анализу : учебно-практическое пособие / Б. П. Осиленкер. — Москва : Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 132 c. — ISBN 978-5-7264-1186-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/60819.html

учебно-методическая

1. Богданов, Андрей Юрьевич**.** Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 1 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2012. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/231/bogdanov3.pdf
2. Богданов, Андрей Юрьевич. Методы функционального анализа в вычислительной математике : учеб.-метод. пособие. Ч. 2 : / Богданов Андрей Юрьевич ; УлГУ, ФМиИТ. - Ульяновск : УлГУ, 2015. URL http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/242/bogdanov-2_2015.pdf
3. Богданов, Андрей Юрьевич.Задачи и упражнения по функциональному анализу : учеб.-метод. пособие / Богданов Андрей Юрьевич. - Ульяновск : УлГУ, 2008.URLhttp://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/985/bogdanov1.pdf
4. Юрьева О. Д. Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Функциональный анализ» для специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность» и 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» / О. Д. Юрьева; УлГУ, Фак. математики, информ. и авиац. технологий. - Ульяновск : УлГУ, 2019. - Загл. с экрана; Неопубликованный ресурс. - Электрон. текстовые дан. (1 файл : 620 КБ). - Текст : электронный. http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Download/MObject/816

Согласовано:

Гл. биб - рь ИБ УлГУ Поликина И. Ю.

должность сотрудника научной библиотеки ФИО подпись

б) Программное обеспечение: Для образовательного процесса по данной дисциплине необходим стационарный класс ПК с установленным следующим программным обеспечением:

МойОфис Стандартный, Альт Рабочая станция 8.

в) Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы

1. Электронно-библиотечные системы:

1.1. IPRbooks : электронно-библиотечная система : сайт / группа компаний Ай Пи Ар Медиа. - Саратов, [2021]. – URL: http://www.iprbookshop.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.2. ЮРАЙТ : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Электронное издательство ЮРАЙТ. – Москва, [2021]. - URL: https://urait.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.3. Консультант студента : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Политехресурс. – Москва, [2021]. – URL: https://www.studentlibrary.ru/cgi-bin/mb4x. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.4. Консультант врача : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Высшая школа организации и управления здравоохранением-Комплексный медицинский консалтинг. – Москва, [2021]. – URL: https://www.rosmedlib.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.5. Большая медицинская библиотека : электронно-библиотечная система : сайт / ООО Букап. – Томск, [2021]. – URL: https://www.books-up.ru/ru/library/ . – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.6. Лань : электронно-библиотечная система : сайт / ООО ЭБС Лань. – Санкт-Петербург,

[2021]. – URL: https://e.lanbook.com. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

1.7. **Znanium.com :** электронно-библиотечная система : сайт / ООО Знаниум. - Москва, [2021]. - URL: http://znanium.com . – Режим доступа : для зарегистрир. пользователей. - Текст : электронный.

1.8. Clinical Collection : коллекция для медицинских университетов, клиник, медицинских библиотек // EBSCOhost : [портал]. – URL: http://web.b.ebscohost.com/ehost/search/advanced?vid=1&sid=9f57a3e1-1191-414b-8763-e97828f9f7e1%40sessionmgr102 . – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

1.9. Русский язык как иностранный : электронно-образовательный ресурс для иностранных студентов : сайт / ООО Компания «Ай Пи Ар Медиа». – Саратов, [2021]. – URL: https://ros-edu.ru. – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.

2. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: справочная правовая система. /ООО «Консультант Плюс» - Электрон. дан. - Москва : КонсультантПлюс, [2021].

3. Базы данных периодических изданий:

3.1. База данных периодических изданий : электронные журналы / ООО ИВИС. - Москва, [2021]. – URL: https://dlib.eastview.com/browse/udb/12. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

3.2. eLIBRARY.RU: научная электронная библиотека : сайт / ООО Научная Электронная Библиотека. – Москва, [2021]. – URL: http://elibrary.ru. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный

3.3. «Grebennikon» : электронная библиотека / ИД Гребенников. – Москва, [2021]. – URL: https://id2.action-media.ru/Personal/Products. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Текст : электронный.

4. Национальная электронная библиотека : электронная библиотека : федеральная государственная информационная система : сайт / Министерство культуры РФ ; РГБ. – Москва, [2021]. – URL: https://нэб.рф. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

5. SMART Imagebase // EBSCOhost : [портал]. – URL: https://ebsco.smartimagebase.com/?TOKEN=EBSCO-1a2ff8c55aa76d8229047223a7d6dc9c&custid=s6895741. – Режим доступа : для авториз. пользователей. – Изображение : электронные.

6. Федеральные информационно-образовательные порталы:

6.1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральный портал / учредитель ФГАОУ ДПО ЦРГОП и ИТ. – URL: http://window.edu.ru/ . – Текст : электронный.

6.2. Российское образование : федеральный портал / учредитель ФГАОУ ДПО ЦРГОП и ИТ. – URL: http://www.edu.ru. – Текст : электронный.

7. Образовательные ресурсы УлГУ:

7.1. Электронная библиотека УлГУ : модуль АБИС Мега-ПРО / ООО «Дата Экспресс». – URL: http://lib.ulsu.ru/MegaPro/Web. – Режим доступа : для пользователей научной библиотеки. – Текст : электронный.

Согласовано:

зам нач УИТиТ / Клочкова АВ / [подпись]

должность сотрудника УИТиТ — ФИО — подпись

12. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Аудитории для проведения лекций, семинарских занятий, для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации.

Аудитории укомплектованы специализированной мебелью, учебной доской. Аудитории для проведения лекций оборудованы мультимедийным оборудованием для представления информации большой аудитории. Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде, электронно-библиотечной системе.

13. СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

В случае необходимости, обучающимся из числа лиц с ограниченными возможностями здоровья (по заявлению обучающегося) могут предлагаться одни из следующих вариантов восприятия информации с учетом их индивидуальных психофизических особенностей:

– для лиц с нарушениями зрения: в печатной форме увеличенным шрифтом; в форме электронного документа; в форме аудиофайла (перевод учебных материалов в аудиоформат); в печатной форме на языке Брайля; индивидуальные консультации с привлечением тифлосурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями слуха: в печатной форме; в форме электронного документа; видеоматериалы с субтитрами; индивидуальные консультации с привлечением сурдопереводчика; индивидуальные задания и консультации;

– для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме; в форме электронного документа; в форме аудиофайла; индивидуальные задания и консультации.

В случае необходимости использования в учебном процессе частично/исключительно дистанционных образовательных технологий, организация работы ППС с обучающимися с ОВЗ и инвалидами предусматривается в электронной информационно-образовательной среде с учетом их индивидуальных психофизических особенностей.

Разработчик ______Юрьева______ / ______Юрьева О.Д.______ /
подпись ФИО